

а система (26) становится однородной:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_k = 0. \quad (31)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

Если p есть ранг матрицы системы (31), то она имеет $p - \rho$ линейно независимых решений

$$\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(s)} \quad s = 0, 1, \dots, p - (\rho + 1).$$

Интегро-дифференциальное уравнение (10), как это следует из формулы (30), имеет также $p - \rho$ линейно независимых решений

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k^{(s)} \eta_k(x) \quad (30')$$

$$[s = 0, 1, \dots, p - (\rho + 1)].$$

Значение параметра λ'' , являющегося корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, естественно назвать собственным значением интегро-дифференциального уравнения (10) в случае, когда $m > n$, а функции (30'), отвечающие этому значению λ , — собственными функциями этого уравнения.

Наконец, заметим, что если неоднородная система (26) при $\lambda = \lambda'$ имеет решение, то и неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (1) также будет иметь решение, которое можно представить в виде

$$y(x) = y^{(0)}(x) + \sum_{s=0}^{p-1} B_s y_s(x), \quad (30'')$$

где $y^{(0)}(x)$ — некоторое частное решение уравнения (1), а $y_s(x)$ имеют вид (30').

Итак, мы можем сформулировать следующие теоремы.

Пусть $m > n$, $\Delta(\lambda)$ — определитель системы (29), ρ — ранг матрицы этой системы.

Теорема 5. Если λ не является корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (23), в которой A_k определяются однозначно из системы (26).

Теорема 6. Для того, чтобы однородное уравнение (10) имело ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. При выполнении этого условия уравнение (10) имеет $p - \rho$ линейно независимых решений (30').

Теорема 7. Пусть λ'' есть корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Для того чтобы неоднородное уравнение (1) было разрешимо при $\lambda = \lambda''$ необходимо и достаточно, чтобы при этом значении λ была разрешима система (26). В случае разрешимости этой системы общим решением уравнения (1) будет функция (30'').

3. Предыдущие рассуждения теряют смысл в том случае, когда λ совпадает с собственным числом ядра M интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b M(x, t) u(t) dt. \quad (32)$$

Пусть λ_1 есть такое число, ν — ранг этого числа; $\{u_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — системы собственных функций уравнений (32) и союзного с (32), соответствующих собственным значениям λ_1 .